Егер $f(-\pi)=f(\pi)$ болса, периодты созынды f(x)-тің [—π,π]-дегі графигін ***OX*** осінің бойында карапайым қайталау болып шығады.

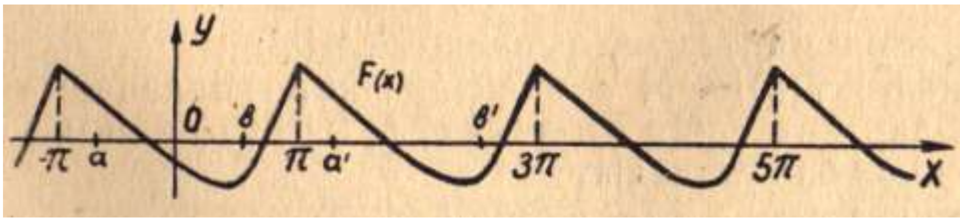
Ал егер $f(-\pi)\neq f(\pi)$ болған жағдайда $f(-\pi)$ *мен* $f(\pi)$ мәндерін өзгертпейінше [—π,π]-дің сыртында периодты созындыны іске асыра алмаймыз, өйткені периодты функцияның анықтамасына сәйкес $F(x)=F(x+2\pi)$, демек, $F(-\pi)=F(\pi)$ теңдіктері орындалуы міндет.

Бұл қиыншылықтан екі түрлі тәсілмен құтылуға болады:

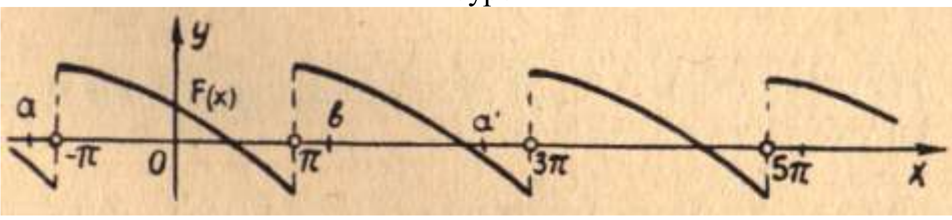
1) Не $f(-\pi)$ мен $f(\pi)$ мәндерін қарастырудан мүлдем шығарып тастаймыз, яғни $x=\pm\pi$ нүктелерінде ***f(x)*** функциясы анықталмаған деп аламыз; сол себепті оның периодты созындысы ***F(x)***-те $x=(2k-1)\pi$ $(k = 0, \pm1, \pm2)$ нүктелерінде анықталмайды.

2) f(—π) пен f(π) мәндерін өзімізше өзгертіп, өз ара тең етіп аламыз.

Келешек мүдделер үшін пайдалы мына ескертпеге тоқтала кетелік. Егер $[a, b]\in[-\pi,\pi]$ болса, ***f(x)*** функциясының $[a, b]$-нің сыртындағы периодты созындысы ***F(x)***-ті тұрғызғанда $F(-\pi)=F(\pi)$ деп алу, ал егер $[-\pi,\pi]\in[a, b]$ болған жағдайда $F(-\pi)=F(\pi)=\dfrac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}$ деп алған ыңғайлы болатынын ескертеміз (4,5-суреттер).



4-сурет

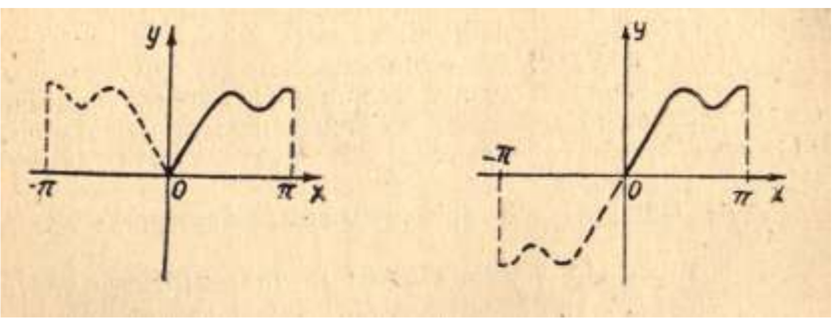


5-сурет

Ескертпе 1. Бойында ***f(x)*** функциясы анықталған, ұзындығы $2l$-ге тең кез келген кесіндіні координаталар басына сим-метриялы деп санауға болады, өйткені олай болмаған күнде аналитикалық геометриядан белгілі формула бойынша координаталар басын кесіндінің ортасына көшіруге болады.

Ескертпе 2. $[a, a+2\pi]$ кесіндісінде берілген f***(x)*** периодсыз функциясын $[-\pi,\pi]$ кесіндісінде берілген жағдайдағыдай периодты созуға болады, бірақ, егер $f(a)\neq f(a+2\pi)$ болған кезде периодты созынды ***F(x)***-тің $x = a + 2k\pi$ (k = 0, ±1, ±2, ...) нуктелерінде үзілісі болады.

Нақтылы берілген есептер жағдайында кейде жұп, кейде тақ периодты созынды пайдалы болатынын ескерте кетелік. Сонымен бірге жұп периодты созындының графигі ординаталар осіне, так периодты созындының графигі— координаталар басына симметриялы болатынын есте тұтқан жөн (6,7-суреттер)



6-сурет 7-сурет

Әдебиеттер: [1], 186-190 б., [2] (2-бөлім).

№21 ДӘРІС. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ КӨПМҮШЕЛІКТЕР. ФУРЬЕНІҢ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ҚАТАРЛАРЫ.

Дәрістің мақсаты: Тербеліс процесін өрнектейтін қарапайым гармониканың теңдеуін түрлендіру арқылы тригонометриялық көпмүшелікті ала білу, Фурьенің тригонометриялық қатарының анықтамасын меңгеру.

(11) тригонометриялық функциялар жүйесінің ақырлы сызықтық көшенін, яғни

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

түріндегі функцияны тригонометриялық көпмүшелік деп атаймыз. (мұндағы n көпмүшелік дәрежесі, егер ең болмағанда a_n , b_n сандарының біреуі нөлден өзгеше болса).

Мынадай тұжырымдар айқын.

1. Егер $P_m(x)$ - дәрежесі m алгебралық көпмүшелік болса, онда $P_m(\cos x)$ және $P_m(\sin x)$ өрнектерінің әрқайсысы тригонометриялық көпмүшелік.

2. Егер $T_n(x)$ - тригонометриялық көпмүшелік болса, онда $T_n(x)\sin x$, $T_n(x)\sin^2 x$ өрнектері де тригонометриялық көпмүшелік.

$f(x)$ функциясы пеоиоды Т периодты функция деп аталады, егер $f(x)$ барлық нақты x үшін анықталған және кез келген нақты x үшін

$f(T+x)=f(x)$

теңдігі орындалса. Бұл шартты, әдетте, периодтылық шарты деп атайды. Тригонометриялық жүйенің барлық элементтері периодты.

1-Теорема.(Вейерштрасс). Егер $f(x)$ функциясы $[-\pi, \pi]$ кесіндісінде үзіліссіз және $f(\pi)=f(-\pi)$ шартын қанағаттандырса, онда бұл функцияны осы сегментте тригонометриялық көпмүшелікпен бірқалыпты жуықтауға болады, яғни $f(x)$ функциясы мен кез келген ε оң саны үшін $[-\pi, \pi]$ кесіндісінде

$$|f(x)-T(x)|< \varepsilon \qquad (28)$$

теңсіздігі орынды.

Дәлелдеу. Ең алдымен $f(x)$ функциясын жұп деп ұйғарайық, яғни $f(-x)=f(x)$ $\forall x \in[-\pi, \pi]$. Күрделі функция үзіліссіздігі туралы теорема бойынша F(t)= f(arccost) функциясы t аргументі арқылы $-1\le t \le 1$ кесіндісінде үзіліссіз. Ал F(t) үзіліссіз функция үшін Вейерштрасс теоремасы бойынша кез келген ε>0 саны үшін $|f(\arccos t)-P(t)|<\varepsilon$ теңсіздігін барлық [-1, 1] кесіндісінде қанағаттандыратын P(t) көпмүшелігі табылады. Егер $t=\cos x$ десек, онда барлық [0 , π] кесіндісінде

$$|f(x)- P(\cos x)|< \varepsilon \qquad (29)$$

теңсіздігін аламыз. Ал $P(\cos x)$, $f(x)$ функциялары жұп болғандықтан (29) теңсіздік [-π , 0] кесіндісінде де орынды. Сонымен, (29) теңсіздік бүкіл [-π, π] кесіндісінде орынды. Мұндағы $P(\cos x)$ тригонометриялық көпмүшелік болғандықтан, теорема жұп $f(x)$ функциясы үшін дәлелденді.

Енді теорема шартын қанағаттандыратын $f(x)$ функциясын периоды 2π периодты бүкіл $-\infty< x <+\infty$ шексіз түзуіне созуға болады, яғни осылай созылған функция шексіз түзудің әрбір x нүктесінде үзіліссіз. $P(\cos x)$ функциясы да 2π периодты болғандықтан (29) теңсіздік бүкіл $-\infty< x <+\infty$ түзуінде орынды.

Айталық, $f(x)$ функциясы теорема шартын қанағаттандыратын функция болсын. Бұл функцияны шексіз түзуге 2π периодты созайық және бұл арқылы

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}, \qquad f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}\sin x \tag{30}$$

екі жұп функцияларын құрайық. Бұларға сәйкес дәл жоғарыдағыдай $T_1(x)$, $T_2(x)$ тригонометриялық көпмүшеліктері табылып, $\forall x \in R$ және $\forall\varepsilon>0$ үшін

$$\left|f_1(x)-T_1(x)\right|\prec\frac{\varepsilon}{4}, \qquad \left|f_2(x)-T_2(x)\right|\prec\frac{\varepsilon}{4}$$

теңсіздіктері орындалады, сондықтан

$$\left|f_1(x)\sin^2 x-T_1(x)\sin^2 x\right|\prec\frac{\varepsilon}{4}, \qquad \left|f_2(x)\sin x-T_2(x)\sin x\right|\prec\frac{\varepsilon}{4}.$$

Егер бұларды, (30) теңдіктерді ескеріп, өзара қоссақ

$$\left|f(x)\sin^2(x)-T_3(x)\right|\prec\frac{\varepsilon}{2} \tag{31}$$

мұндағы $T_3(x)=T_1(x)\sin^2 x+T_2(x)\sin x$ тригонометриялық көпмүшелік.

Бізге $f(x)$ функциясының орнына $f(x+\frac{\pi}{2})$ функциясын алуымызға болады, өйткені бұл функция да теорема шартын қанағаттандырады.Сонда дәл (31) сияқты $f(x+\frac{\pi}{2})$ функциясы үшін де

$$\left|f(x)\sin^2(x)-T_4(x)\right|\prec\frac{\varepsilon}{2} \tag{32}$$

теңсіздігін қанағаттандыратын $T_4(x)$ тригонометриялық көпмүшелігі табылады. Енді (32) теңсіздікте x орнына $x-\frac{\pi}{2}$ алып , $T_4(x-\frac{\pi}{2})$ функциясын $T_5(x)$ деп бүкіл шексіз түзуде

$$\left|f(x)\cos^2(x)-T_5(x)\right|\prec\frac{\varepsilon}{2} \tag{33}$$

теңсіздігін аламыз. Енді (31) мен (33) қосып, $T(x)=T_3(x)+T_5(x)$ деп, біз бүкіл сан өсінде (28) теңсіздігін аламыз. Теорема дәлелденді.

Ескерту. Мына $f(x)\in C[-\pi, \pi]$ және $f(-\pi)=f(\pi)$ шарттарының әрқайсысы $f(x)$ функциясын тригонометриялық көпмүшеліктермен $[-\pi, \pi]$ кесіндісінде бірқалыпты жуықтау үшін жеткілікті екенін көреміз.

Басқаша Вейерштрасс теоремасын былай айтуға болады: [-π, π] кесіндісінде $f(x)$ функциясын тригонометриялық көпмүшеліктермен жуықтау үшін $f(x)$ функциясының [-π , π] кесіндісінде үзіліссіз және $f(-\pi)=f(\pi)$ болуы қажетті және жеткілікті.
Жеткіліктілігі. 1-теорема мазмұнын да, енді қажеттілігін дәлелдейік.
Қажеттілігі. $\{T_n(x)\}$, айталық, [-π, π] сегментінде $f(x)$ функциясына бірқалыпты жинақталатын тригонометриялық көпмүшеліктер тізбегі болсын. Ал әрбір $T_n(x)$ функциясы [-π , π] кесіндісінде үзіліссіз болғандықтан $f(x)$ функциясы да [-π , π] кесіндісінде үзіліссіз, яғни $\forall\varepsilon>0\ \exists\ T_n(x)$

$$|f(x)-T_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x\in[-\pi, \pi] .$$

Демек,

$$|f(-\pi)-T_n(-\pi)|<\frac{\varepsilon}{2},\ |f(\pi)-T_n(\pi)|<\frac{\varepsilon}{2} .$$

Бұл екі теңсіздікпен 2π периодтың шартынан туатын $T_n(-\pi)=T_n(\pi)$ теңдігінен

$$|f(-\pi)-f(\pi)|<\varepsilon,$$

ал мұнан, ε кез келген болғандықтан,

$$f(-\pi)=f(\pi).$$

Әдебиеттер: [1], 192-194 б., [2] (2-бөлім).

№22 ДӘРІС. ФУНКЦИЯНЫҢ ОРТОГОНАЛЬ СИСТЕМАСЫ. МЫСАЛДАР.

Дәрістің мақсаты: Фурье қатарлары теориясындағы негізгі ұғым–функциялар системасының ортогональдығы ұғымын меңгеру. Өзара ортогональ функциялар, қосар ортогональ система, нормаланған система ұғымдарының анықтамасын білу. Ортогональ системалардың мысалдарын қарастыру.

1-Теорема. (11) тригонометриялық жүйе тұйық, яғни [-π, π] кесіндісінде құрама–үзіліссіз $f(x)$ функциясы мен кез келген ε оң саны үшін

$$||f(x)-\mathrm{T}(x)||=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2dx}<\varepsilon \qquad (34)$$

теңсіздігін қанағаттандыратын Т(x) тригонометриялық көпмүшелігі табылады.
Дәлелдеу. Ең алдымен [-π, π] кесіндісінде құрама-үзіліссіз $f(x)$ функциясы мен кез келген ε>0 саны үшін

$$||f(x)-\mathrm{F}(x)||=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-F(x)]^2dx}\prec\frac{\varepsilon}{2} \qquad (35)$$

теңсіздігінің орындалуы мен F(-π)=F(π) шартын қанағаттандыратын [-π , π] сегментінде үзіліссіз F(x) функциясының табылатынын байқаймыз. Шынында да, F(x) функциясын $f(x)$ функциясына, оның үзіліссіз нүктелерінде тең, ал үзіліс нүктелері мен $x=\pi$ нүктесінің жеткілікті кішкене маңайында сызықтық функция етіп, яғни F(x) функциясын бүкіл [-π , π] кесіндісінде үзіліссіз және F(-π)=F(π) шартын қанағаттандыратын етіп алу жеткілікті.

Сонда құрама-үзіліссіз функция мен оны кесуші сызықтық функция шектеулі болғандықтан $f(x)$ функциясының үзіліс нүктелері мен $x=\pi$ нүктесінің жоғарыда көрсетілген маңайын жеткілікті кішкене етіп алып, біз (35) теңсіздіктің орындалуын қамтамасыз ете аламыз.

Ал (1-теорема) бойынша F(x) функциясы үшін [-π , π] кесіндісінде

$$|F(x)-T(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{2\pi} \qquad (36)$$

теңсіздігін қанағаттандыратын T(x) тригонометриялық көпмүшелігі табылады. Сонда бұдан

$$\|F(x)-T(x)\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[F(x)-T(x)]^2dx}\le\frac{\varepsilon}{2} \qquad (37)$$

Енді (35) және (37) теңсіздіктерінен

$$\|f(x)-T(x)\|\le\|f(x)-F(x)\|+\|F(x)-T(x)\|<\varepsilon$$

(34) теңсіздік шығады. Теорема дәлелденді.

Ескерту. Осы теорема мен 3-теорема (§2) (11) тригонометриялық жүйенің толықтығы шығады. Ал бұдан $\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\}$, n=1,2,…, жүйесінің [0 , π] сегментінде (немесе [-π,0] сегментінде) құрама-үзіліссіз функциялар жиынында толық екені шығады.

Шынында да, [0, π] кесіндісінде құрама – үзіліссіз және осы кесіндіде $\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\}$ жүйесінің барлық элементтеріне ортогональ болады. Ал (11) толық болғандықтан, бұл функция [-π, π] кесіндісінде нөлге тең, демек, [0, π] кесіндісінде нөлге тең.

Дәл осылай $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx$, n=1,2,…,

жүйесі де [0 , π] кесіндісінде барлық құрама-үзіліссіз функциялар жиынында толық. Бұл тұжырым [-π, 0] кесіндісі үшін де дұрыс.

Әдебиеттер: [1], 194-200 б.

№23 ДӘРІС. ПЕРИОДЫ 2П ФУНКЦИЯНЫҢ ФУРЬЕ ҚАТАРЫ.

Дәрістің мақсаты: Функцияның тригонометриялық қатарға жіктелуін, ортогональ функциялардың қасиеттерін пайдаланып, Эйлер-Фурье коэффициенттерін таба білу.